

**Seminararbeit im W-Seminar:**  
**„Bezaubernde Beweise“**  
**Leitfach Mathematik**

**Thema:** *Der Satz von Pick*

vorgelegt von:

am:

.....

Punktzahl der einfachen Wertung: bei Kursleiter:  
(schriftlich / mündlich)

..... / .....

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Seminararbeit selbstständig ohne fremde Hilfe angefertigt habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

....., den ..... ..

# Inhaltsverzeichnis

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| Abbildungsverzeichnis                                     | II |
| Vorwort                                                   | 3  |
| 1 Einleitung                                              | 4  |
| 2 Der Satz von Pick                                       | 5  |
| 2.1 Definition . . . . .                                  | 5  |
| 2.2 Ein Beispiel . . . . .                                | 6  |
| 3 Beweis des Satzes von Pick                              | 7  |
| 3.1 Definition Gesamtgewicht . . . . .                    | 7  |
| 3.2 Zusammenhang von Fläche und Gesamtgewicht . . . . .   | 8  |
| 3.3 Winkelsumme im konvexen n-Eck . . . . .               | 10 |
| 3.4 Zusammenführung . . . . .                             | 10 |
| 4 Schluss                                                 | 12 |
| Verzeichnis der verwendeten Quellen und Sekundärliteratur | 13 |

# Abbildungsverzeichnis

|     |                                                                   |    |
|-----|-------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Georg Alexander Pick, 1885 (Quelle: Wikipedia) . . . . .          | 4  |
| 1.2 | KZ Theresienstadt (Quelle: Süddeutsche Zeitung/Scherl/SZ Photo) . | 4  |
| 2.1 | Ein Geobrett (Quelle: Schmidt Lehrmittel) . . . . .               | 5  |
| 2.2 | Unterschied zu einfachen Vielecken . . . . .                      | 6  |
| 2.3 | Ein einfaches Dreieck . . . . .                                   | 6  |
| 3.1 | Dreieck mit 3 markierten Punkten . . . . .                        | 7  |
| 3.2 | Zwei disjunkte Vielecke . . . . .                                 | 8  |
| 3.3 | Drei Fälle . . . . .                                              | 9  |
| 3.4 | Ein konvexes Fünfeck mit eingezeichneten Diagonalen . . . . .     | 10 |

Alle Abbildungen ohne Quelle wurden selbst angefertigt.

## Vorwort

„Bezaubernde Beweise“ - so heißt das Buch, aus dem der Großteil dieser Arbeit stammt. Und irgendwie trifft dieser Titel den Nagel auch genau auf den Kopf. In dieser Arbeit lernen wir einen Satz aus der Mathematik kennen, wenden ihn an und beweisen ihn schließlich mit einer Eleganz, sodass es sogar ein Schüler nachvollziehen kann, der sich noch nicht viel mit der Materie befasst hat.

Zunächst möchte ich mich jedoch bei meinem Lehrer Herrn Riesenbeck bedanken, der es nicht nur geschafft hat, mich für die Mathematik zu begeistern, sondern auch immer zur Stelle war, wenn es Probleme gab, seien es kleine Schwierigkeiten beim Verständnis oder generelle Probleme bei der richtigen Formatierung der Arbeit.

# 1 Einleitung

In dieser Arbeit geht es um den Satz von Pick. Er stammt vom österreichischen Mathematiker Georg Alexander Pick (1859-1942), den ich hier kurz vorstellen möchte. Pick wurde am 10. August 1859 in Wien geboren, verbrachte aber einen Großteil seines Lebens in Prag. In seiner jüdischen Familie wurde er bis zu seinem 11. Lebensjahr von seinem Vater Adolf Josef Pick ausgebildet.

Er studierte Mathematik und Physik an der Universität Wien. Seine erste mathematische Arbeit veröffentlichte er bereits mit 17 Jahren. Nach seiner Promotion 1880 schrieb er viele Artikel zu Differenzialgleichungen, komplexer Analysis und Differenzialgeometrie.

Bis auf eine Ausnahme blieb Pick für den Rest seiner Karriere in Prag, wo er zum Professor ernannt wurde. Nachdem er 1927 in den Ruhestand ging, zog es Pick wieder in seine Heimatstadt Wien zurück. Als jedoch 1938 deutsche Truppen in Wien einmarschierten, flüchtete er erneut nach Prag, wo er Schutz vor den Nationalsozialisten suchte. 1942 wurde er schließlich doch verhaftet und in das Konzentrationslager Theresienstadt gebracht, wo er kurz darauf im Alter von 82 Jahren starb. (Vgl. *O'Connor, Robertson, Georg Alexander Pick*)

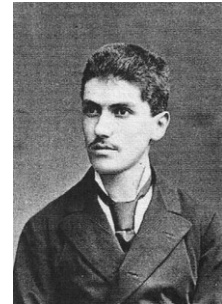


Abbildung 1.1: Georg Alexander Pick, 1885 (Quelle: Wikipedia)



Abbildung 1.2: KZ Theresienstadt (Quelle: Süddeutsche Zeitung/Scherl/SZ Photo)

## 2 Der Satz von Pick

Der Satz von Pick wurde erstmals 1899 veröffentlicht, gewann aber erst 1969 Beachtung, als Hugo Steinhaus ihn in seinem Buch *Mathematical Snapshots* erwähnte. Er beeindruckt vor allem wegen seiner Eleganz und Einfachheit.

Mit dem Satz von Pick lässt sich spielend leicht der Flächeninhalt von einfachen Gitterpolygonen ausrechnen. Er wird manchmal von Grundschülern verwendet, die mit einem Geobrett (siehe Abbildung 2.1) und Gummibändern Figuren auf das Brett spannen und dann leicht die Fläche des Vielecks berechnen können. (Vgl. *Alsina, Nelsen, Bezaubernde Beweise*)

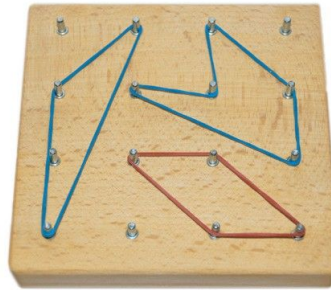


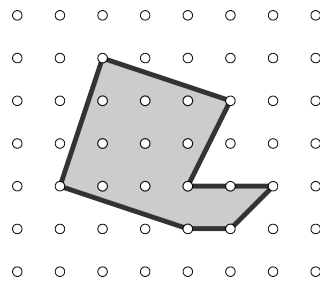
Abbildung 2.1: Ein Geobrett (Quelle: Schmidt Lehrmittel)

### 2.1 Definition

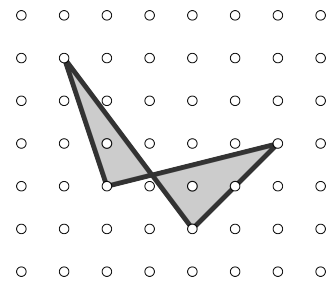
Ein *Gitterpunkt* in der Ebene ist ein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten, und ein *Gittervieleck* ist ein Vieleck, dessen Ecken auf Gitterpunkten liegen. Als *einfach* bezeichnet man ein Vieleck, welches keine Selbstüberschneidungen besitzt (siehe Abbildung 2.2). Es sei  $S$  nun ein einfaches Gittervieleck. Wir bezeichnen mit  $i$  die Anzahl der Gitterpunkte im inneren des Vielecks und mit  $b$  die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des Vielecks. Der Satz von Pick berechnet nun den Flächeninhalt  $A$  dieses Vielecks:

$$A(S) = i + \frac{b}{2} - 1$$

(Vgl. *Alsina, Nelsen, Bezaubernde Beweise*)



(a) Beispiel für ein einfaches Vieleck



(b) Beispiel für ein Vieleck, das nicht einfach ist

Abbildung 2.2: Unterschied zu einfachen Vielecken

## 2.2 Ein Beispiel

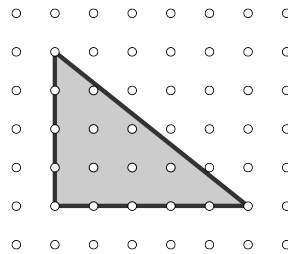


Abbildung 2.3: Ein einfaches Dreieck

Der Flächeninhalt dieses Dreiecks lässt sich also folgendermaßen ausrechnen: Die Anzahl der Gitterpunkte im inneren der Form ist 6, die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand beträgt 10. Wenn man diese Werte jetzt in den Satz von Pick einsetzt, ergibt sich:

$$A = 6 + \frac{10}{2} - 1 = 10$$

Zur Überprüfung rechnen wir hier nochmal den Flächeninhalt mit der Standard-Dreiecksformel aus:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$$

### 3 Beweis des Satzes von Pick

Zwar gibt es viele Möglichkeiten den Satz von Pick zu beweisen, alle mit ihren eigenen eleganten Tricks, jedoch beziehen sich alle auf den Fakt, dass der Flächeninhalt elementarer Gitterdreiecke (Dreiecke, die keine Gitterpunkte im inneren haben<sup>1</sup>)  $1/2$  ist<sup>2</sup>.

Unser Beweis jedoch (nach *Dale Varberg*, 1985) geht anders vor, er ist „direkt und intuitiv“<sup>3</sup>:

#### 3.1 Definition Gesamtgewicht

Zunächst wird für jeden Punkt auf dem das Vieleck liegt  $P_K$  ein *Sichtbarkeitswinkel*  $\theta_K$ , mit dem man in das Vieleck „einsehen“ kann und ein Gewicht  $\omega_K = \theta_K/360^\circ$  definiert<sup>4</sup>.

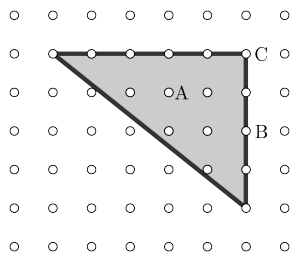


Abbildung 3.1: Dreieck mit 3 markierten Punkten

Beispielsweise hat in Abbildung 3.1 der Punkt A einen Einsehwinkel von  $360^\circ$  und somit ein Gewicht von 1. Punkt B hat einen Einsehwinkel von  $180^\circ$  (Gewicht  $1/2$ ), und Punkt C  $90^\circ$  (Gewicht  $1/4$ ).

Zählen wir jetzt die Gewichte aller Punkte zusammen, die sich im Vieleck und auf dem Rand des Vielecks befinden, so erhalten wir das Gesamtgewicht  $W(S) = \sum_{P_K \in S} w_K$  des Vielecks  $S$ <sup>5</sup>.

<sup>1</sup>Vgl. Zimmer, Alexandra: Der Satz von Pick, S. 14

<sup>2</sup>Vgl. Varberg, Dale: Pick's Theorem Revisited, S. 584

<sup>3</sup>Alsina, Claudi und Nelsen, Roger: Bezaubernde Beweise. Eine Reise durch die Eleganz der Mathematik, S. 48

<sup>4</sup>Vgl. Alsina, Nelsen: Bezaubernde Beweise, S. 48

<sup>5</sup>Ebd.

### 3.2 Zusammenhang von Fläche und Gesamtgewicht

Als nächstes stellen wir ein sogenanntes Lemma auf. Ein Lemma ist ein Zwischensatz, den wir benötigen, um den eigentlichen Satz zu beweisen. Das Lemma muss natürlich auch bewiesen werden.

**Lemma 1.** *Für jedes einfache Gittervieleck  $S$  ist  $W(S) = A(S)$ .*

*Beweis.* Erst stellen wir fest, dass das Gesamtgewicht genauso wie die Fläche *additiv* ist. Wenn  $S_1$  und  $S_2$  bis auf gemeinsame Randlinien disjunkt sind, sich also keine Flächen teilen und  $S = S_1 \cup S_2$  (z.B. wie in Abbildung 3.2), dann gilt  $W(S) = W(S_1) + W(S_2)$ . Das liegt daran, dass sich die Sichtbarkeitswinkel in  $S_1$  und  $S_2$  an einem gemeinsamen Gitterpunkt zu dem gemeinsamen Gesamtsichtbarkeitswinkel  $S$  an diesem Punkt addieren.

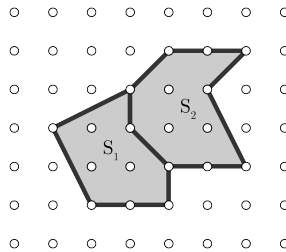


Abbildung 3.2: Zwei disjunkte Vielecke

Unsere Beweisführung geht jetzt so vor, dass wir unser Vieleck in Dreiecke aufteilen, für diese Dreiecke das Lemma beweisen und dann dank der Additivität somit auch das Lemma für unser Ursprüngliches Vieleck gilt. Dafür betrachten wir 3 Fälle:

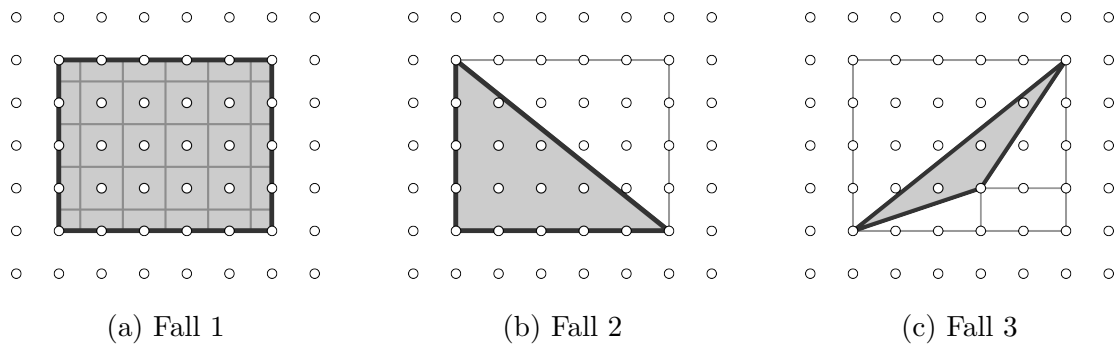


Abbildung 3.3: Drei Fälle

Im ersten Fall, wie z.B. in Abbildung 3.3a beziehen wir uns auf ein Rechteck mit horizontalen und vertikalen Seitenrändern. Jeder Gitterpunkt entspricht einem Rechteck oder Quadrat, dessen Fläche genauso groß ist wie das Gewicht des Punktes. Zum Verständnis wurden in Abbildung 3.3a Hilfslinien eingezeichnet. Also ist das Gesamtgewicht gleich der Fläche des Rechtecks.

Der zweite Fall, Abbildung 3.3b, zeigt ein rechtwinkliges Dreieck mit horizontalen und vertikalen Katheten. Hier folgt die Aussage aus Fall 1 nach division durch 2. Es gibt halb so viele Gitterpunkte wie vorhin, und das Gewicht der Gitterpunkte an den Hypothenusenenden wird genauso durch 2 geteilt. Daraus folgt wieder  $W(S) = A(S)$ .

Im dritten Fall, Abbildung 3.3c, berechnen wir den Flächeninhalt eines allgemeinen Gitterdreiecks. Wir nutzen wiederum die Additivität von  $A$  und  $W$ , nehmen ein allgemeines Gitterdreieck und umgeben es mit Dreiecken aus Fall 2 und Rechtecken aus Fall 1. Es folgt wieder  $W(S) = A(S)$ .

Jetzt können wir ein beliebiges einfaches Gittervieleck konstruieren, bei dem der Satz  $W(S) = A(S)$  zutrifft. ■

(Vgl. *Alsina, Nelsen, Bezaubernde Beweise*)

Das schwarze Quadrat am Ende des Beweises ist ein Symbol für den in der Mathematik wichtigen Ausdruck „quod erat demonstrandum“, kurz „Q.E.D.“, was auf Deutsch so viel heißt wie „was zu beweisen war“. Es markiert daher also das Ende unseres Beweises. (Vgl. *Quod erat demonstrandum, Tombstone (typography), Wikipedia*)

### 3.3 Winkelsumme im konvexen n-Eck

Damit wir den Satz von Pick beweisen können, nutzen wir einen weiteren Zwischensatz:

**Lemma 2.** *Die Summe der Winkel eines konvexen n-Eck ist  $(n - 2)180^\circ$ .*

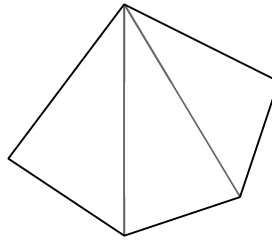


Abbildung 3.4: Ein konvexes Fünfeck mit eingezeichneten Diagonalen

*Beweis.* Da das n-Eck konvex ist, können wir einen beliebigen Punkt auswählen und von diesem Punkt  $n - 3$  Diagonalen einzeichnen. Das liegt daran, dass eine Linie von diesem Punkt zu allen anderen Punkten außer seinen unmittelbaren Nachbarn und zu sich selbst eine Diagonale ergibt. Als Beispiel wurden in Abbildung 3.4 in das Fünfeck die  $5 - 3 = 2$  Diagonalen eingezeichnet.

Die  $n - 3$  Diagonalen haben das n-Eck jetzt in  $n - 2$  Dreiecke unterteilt. Für jedes Dreieck gilt, dass die Winkelsumme  $180^\circ$  ist. Somit ist für das n-Eck die Winkelsumme  $(n - 2)180^\circ$ . ■

(Vgl. Alsina, Nelsen, *Bezaubernde Beweise*)

### 3.4 Zusammenführung

Den Satz von Pick beweisen wir nun, indem wir alles bisher gelernte einsetzen und dann auflösen.

Zur Erinnerung:

**Satz von Pick.** *Für ein einfaches Gittervieleck  $S$  mit  $i$  inneren Gitterpunkten und  $b$  Randpunkten gilt  $A(S) = i + b/2 - 1$ .*

*Beweis.* Durch Lemma 1 erfahren wir, dass die Fläche gleich dem Gesamtgewicht entspricht. Das Gesamtgewicht können wir aufteilen in das Gewicht aller Punkte im inneren des Vielecks  $I$ , aller Eckpunkte  $E$  und aller Punkte auf dem Rand  $R$ .

$$A(S) = W(S) = \sum_{P_k \in I} w_k + \sum_{P_k \in E} w_k + \sum_{P_k \in R} w_k$$

Jeder Punkt im inneren des Vielecks hat einen Einsehwinkel von  $360^\circ$  und somit ein Gewicht von 1. Wir definieren also  $i$  als die Anzahl aller Punkte im inneren und schreiben dann statt der ersten Summe  $i$ .

$$\sum_{P_k \in I} w_k = \frac{i \cdot 360^\circ}{360^\circ} = i$$

Bei der zweiten Summe wissen wir, dass alle Eckpunkte zusammen eine Winkelsumme von  $(n-2)180^\circ$  haben (Lemma 2). Damit wir das Gewicht bekommen, teilen wir das noch durch  $360^\circ$ .  $c$  sei hierfür die Anzahl der Eckpunkte.

$$\sum_{P_k \in E} w_k = \frac{(c-2)180^\circ}{360^\circ} = \frac{c-2}{2}$$

Bei der dritten Summe, den Randpunkten, wissen wir, dass jeder Randpunkt einen Einsehwinkel von  $180^\circ$  hat. Damit wir dafür das Gewicht bekommen, teilen wir auch hier wieder durch  $360^\circ$ .  $r$  sei hierfür die Anzahl der Randpunkte.

$$\sum_{P_k \in R} w_k = \frac{r \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{r}{2}$$

Wenn wir dann alles einsetzen, kommen wir auf

$$A(S) = W(S) = i + \frac{c-2}{2} + \frac{r}{2}$$

Wir können jetzt vereinfachen. Die Anzahl der Eckpunkte  $c$  und die Anzahl der Punkte auf dem Rand  $r$  können wir zusammenfassen in die Anzahl *aller* Punkte auf dem Rand  $b = c + r$ . Danach müssen wir nur noch auflösen.

$$= i + \frac{b-2}{2} = i + \frac{b}{2} - 1$$

■

(Vgl. *Alsina, Nelsen, Bezaubernde Beweise*)

## 4 Schluss

Zusammenfassend haben wir in dieser Arbeit also etwas über Georg Pick, seinen Satz und eine mögliche Beweisführung gelernt. Außerdem wissen wir jetzt, wie man in der Mathematik formal korrekt Sätze und Lemmas aufstellt und diese beweist. Jetzt bleibt nur noch die Frage, ob dieser Beweis auch dem Titel des Seminars, also bezaubernd zu sein, gerecht wird. Persönlich finde ich, dass der vorgestellte Beweis es tatsächlich schafft, zwar knapp, aber trotzdem verständlich und über einen eleganten Weg (mit Hilfe des Gewichtes) den Satz von Pick zu beweisen, sogar ohne viel über die Schulmathematik hinauszugehen. Allein die Kürze des Beweises hat mich überrascht. Varberg schafft es in seiner Arbeit, in nicht einmal 2 Seiten den Satz von Pick zu beweisen. Und so ein Beweis ist für mich in der Tat bezaubernd.

## Verzeichnis der verwendeten Quellen und Sekundärliteratur

- Alsina Claudi und Nelsen Roger, Bezaubernde Beweise. Eine Reise durch die Eleganz der Mathematik, Berlin 2013 (Hg. Springer Verlag)
- O'Connor John und Robertson Edmund (2005): Georg Alexander Pick. Online im Internet unter: [mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick](http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick) [Stand: 11.10.2020]
- Varberg Dale (1985): Pick's Theorem Revisited. Online im Internet unter: [faculty.math.illinois.edu/~reznick/496-2-6-17.pdf](http://faculty.math.illinois.edu/~reznick/496-2-6-17.pdf) [Stand: 04.11.2020]
- Zimmer Alexandra (2018): Der Satz von Pick. Online im Internet unter: [www2.informatik.hu-berlin.de/~koessler/Proseminar/Proseminar2017/DerSatzvonPickAlexandraZimmer.pdf](http://www2.informatik.hu-berlin.de/~koessler/Proseminar/Proseminar2017/DerSatzvonPickAlexandraZimmer.pdf) [Stand: 08.11.2020]
- Quod erat demonstrandum und Tombstone (typography). Online im Internet unter: [de.wikipedia.org/wiki/Quod\\_erat\\_demonstrandum](http://de.wikipedia.org/wiki/Quod_erat_demonstrandum) und [en.wikipedia.org/wiki/Tombstone\\_\(typography\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Tombstone_(typography)) [Stand: 08.11.2020]